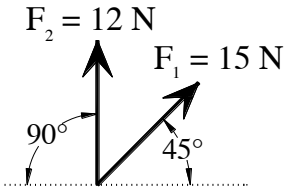
بردارهـــا، برایـــند و تجـــزیه

الف- تمرین‌های حل‌شده

تمرین الف-۱: در شکل V-الف-۱ برایند نیروها را بیابید.



شکل V-الف-۱

پاسخ: برای حل این مسئله می‌توان به دو روش عمل کرد؛ یکی با استفاده از رابطهٔ برایند دو بردار و دیگری تجزیهٔ نیروها به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی:

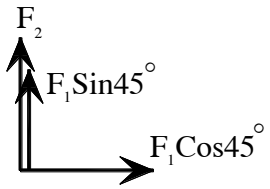
الف- نخست با استفاده از رابطهٔ برایند:

با توجه به شکل، مشخص است که زاویهٔ بین دو بردار برابر 45 = (90 + 45) - 180 است. پس:

$$R=\sqrt{|A|^2+|B|^2+2|A|.|B|.\cos\alpha}=\sqrt{12^2+15^2+2(12)(15)\cos 45^\circ}$$

$$=\sqrt{144+225+2\times12\times15\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx \boxed{\sqrt{623}\approx 25}$$

ب- روش دوم، روش تجزیهٔ نیروها به مؤلفه‌های افقی و عمودی آنهاست. پس از تجزیه (مطابق تصویر V-الف-۲)، برایند نیروها در راستای هر محور را می‌یابیم:



شکل V-الف-۲

$$\sum F_x = F_1\cos 45^\circ = 15\times\frac{\sqrt{2}}{2}=7.5\sqrt{2}\,N$$

$$\sum F_y = F_1\sin 45^\circ + F_2 = (15\times\frac{\sqrt{2}}{2})+12=(7.5\sqrt{2}+12)N$$

حال که برایند در راستای محورها را یافتیم، برای این دو بردار جدید، برایند می‌گیریم که البته بدین علت که این دو بر یکدیگر عمودند و کسینوس زاویهٔ 90 درجه نیز برابر صفر است، محاسبات آسان‌تر خواهد شد:

$$R=\sqrt{|F_x|^2+|F_y|^2}=\sqrt{(7.5\sqrt{2})^2+(7.5\sqrt{2}+12)^2}\approx \boxed{25N}$$

لِم: برای پیدا کردن برایند دو بردار بهتر است از روش استفاده از فرمول و برای بیش از دو بردار از روش تجزیهٔ بردارها به مؤلفه‌ها (x و y) استفاده نمود.

تمرین الف-۲: اگر برایند دو بردار 7.5lb و 12.5lb برابر 17.5lb باشد، زاویهٔ بین این دو بردار چقدر است؟

پاسخ: به منظور یافتن زاویهٔ بین دو بردار یادشده، به دو روش می‌توان مبادرت به حل مسئله نمود. روش نخست، استفاده از فرمول برایند و یافتن α از آنجاست. روش دیگر، بهره‌گیری از قانون سینوس‌ها در مثلث است که در تمرین الف-۱۱ شرح داده خواهد شد.

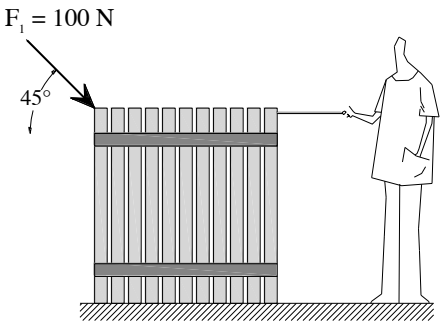
$$R=\sqrt{|A|^2+|B|^2+2|A|.|B|.\cos\alpha}\ \Rightarrow\ 17.5=\sqrt{12.5^2+7.5^2+2(12.5)(7.5)\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow\ 17.5=\sqrt{156.25+56.25+187.5\cos\alpha}\ \Rightarrow\ 17.5=\sqrt{212.5+187.5\cos\alpha}$$

طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم تا رادیکال از میان برداشته شود.

$$(17.5)^2=212.5+187.5\cos\alpha\ \Rightarrow\ 306.25-212.5=187.5\cos\alpha\ \Rightarrow\ 93.75=187.5\cos\alpha\ \Rightarrow\ \cos\alpha=0.5\ \Rightarrow\ \boxed{\alpha=60^\circ}$$

تمرین الف-۳: در تصویر مقابل چنانچه جرم جعبه، ۵۰ کیلوگرم، نیروی اصطکاک بین جعبه و زمین، ۱۰۰ نیوتن باشد و فرد با نیروی ۱۲۰ نیوتن جعبه را بکشد، برایند نیروهای وارد بر جعبه را بیابید.

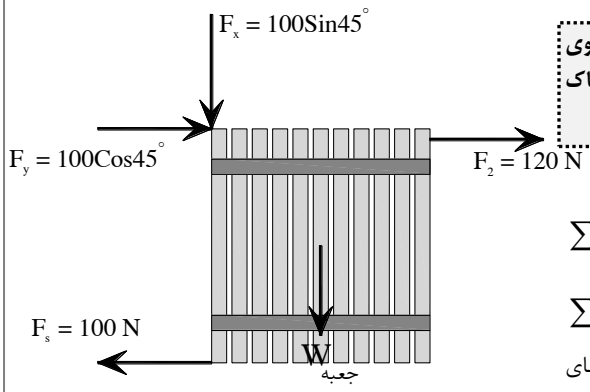


شکل V-الف-۳

پاسخ: نخست باید در پی یافتن نیروهای وارد بر جعبه باشیم. بر این جعبه، چهار نیرو وارد می‌شود. اول وزن آن، دوم نیروی اصطکاک بین زمین و جعبه، سوم نیروی که فرد به‌واسطهٔ آن جعبه را می‌کشد و چهارم نیروی خارجی 100N. به منظور تسهیل در روند حل مسئله، ابتدا نیروی

100N را به مؤلفه‌های افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم و پس از آن نمودار جسم آزاد جعبه را ترسیم خواهیم کرد.

نیروی اصطکاک، همواره در خلاف جهت حرکت، ظاهر می‌شود. در این مسئله، نیروی خارجی و فرد تمایل دارند جعبه را به سمت راست حرکت دهند؛ بنابراین نیروی اصطکاک به سمت چپ خواهد بود.



شکل V-الف-۴

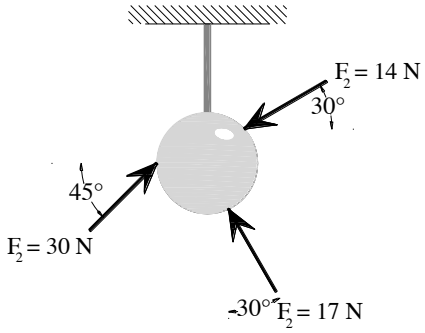
اکنون برایند نیروها را در دو راستای افقی و عمودی می‌یابیم:

$$\sum F_x = +120 - 100 + 100Cos45^\circ = 120 - 100 + 100\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 + 50\sqrt{2}\ N$$

$$\sum F_y = -W - 100Sin45^\circ = -500 - 100\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -(500 + 50\sqrt{2})N$$

حال بین دو نیروی جایگزین در راستاهای افقی و عمودی، برایند می‌گیریم تا برایند کل نیروهای وارد بر جسم مشخص گردد:

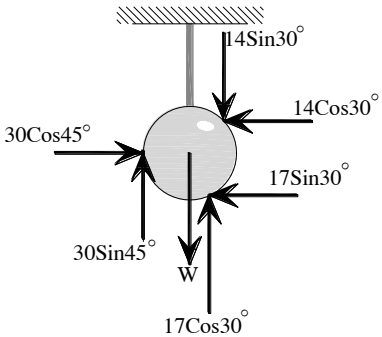
$$R = \sqrt{|F_x|^2 + |F_y|^2} = \sqrt{(20+50\sqrt{2})^2 + (500+50\sqrt{2})^2} \approx \boxed{578N}$$



شکل V-الف-۵

تمرین الف-۴: با توجه به تصویر مقابل برایند نیروهای وارد بر گوی را بیابید. جرم گوی 8kg است.

پاسخ: نیروهای مایل وارد بر گوی را تجزیه نموده و نمودار جسم آزاد آن‌را رسم می‌کنیم (شکل V-الف-۶).

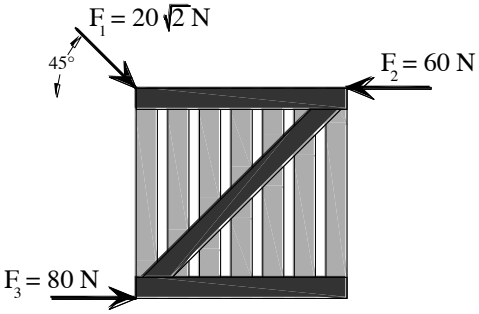


شکل V-الف-۶

$$\sum F_x = 30Cos45^\circ - 14Cos30^\circ - 17Sin30^\circ$$
$$= 30\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 14\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 17\times\frac{1}{2} \approx 0.59N$$
$$\sum F_y = -W + 30Sin45^\circ - 14Sin30^\circ + 17Cos30^\circ$$
$$= -80 + 30\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 14\times\frac{1}{2} + 17\times\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -51N$$

حال برایند کل نیروهای وارد بر گوی را حساب می‌کنیم:

$$R = \sqrt{|F_x|^2 + |F_y|^2} = \sqrt{(0.59)^2 + (-51)^2} \approx \boxed{51N}$$

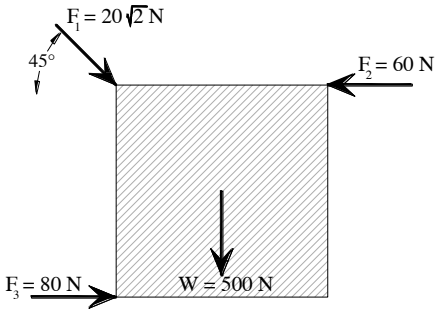


شکل V-الف-۷

تمرین الف-۵: در شکل V-الف-۷ مقدار و راستای بردار برایند وارد بر جعبهٔ 50kg را بیابید.

پاسخ: نخست نمودار جسم آزاد جعبه را ترسیم می‌کنیم (شکل V-الف-۸). پس از ترسیم نمودار جسم آزاد، به منظور ایجاد سهولت در محاسبات، نیروی مورب را به دو مؤلفهٔ افقی و قائم تجزیه می‌نماییم (شکل V-الف-۹).

ابتدا جمع برداری در راستای محور xها را می‌یابیم:



شکل V-الف-۸

$$\sum F_x = 20\sqrt{2}\cos 45^\circ - 60 + 80 = 20\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 60 + 80$$

$$\Rightarrow \sum F_x = +40N$$

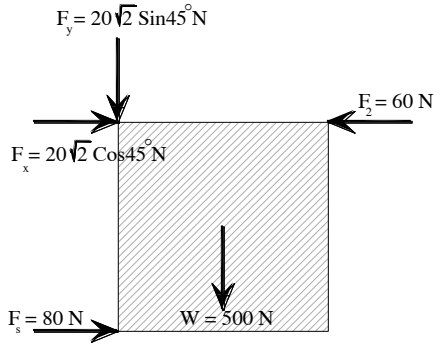
سپس جمع برداری در راستای محور yها:

$$\sum F_y = -20\times\sqrt{2}\times\sin 45^\circ - 500 = -20\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 500$$

$$\Rightarrow \sum F_y = -520N$$

اکنون، اندازهٔ بردار برایند را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \sqrt{|F_x|^2 + |F_y|^2} = \sqrt{(40)^2 + (-520)^2} \approx \boxed{521.5N}$$



شکل V-الف-۹

نوبت به یافتن راستای بردار برایند می‌رسد. در حقیقت در پی یافتن زاویه‌ای هستیم که بردار برایند با راستای محور xها می‌سازد:

به شکل V-الف-۱۰ توجه فرمایید.

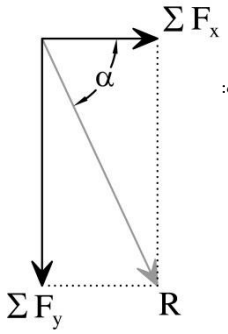
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، تانژانت هر زاویه برابر است با حاصل تقسیم اندازهٔ ضلع مقابل به اندازهٔ ضلع مجاور:

$$\tan\alpha = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{520}{40} \Rightarrow \tan\alpha = 13$$

در نهایت:

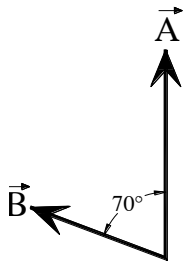
$$\alpha = \text{ArcTan}\,13$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \approx 85.6^\circ}$$



شکل V-الف-۱۰

تمرین الف-۶: برای دو بردار تصویر V-الف-۱۱، مقدار بردارهای برایند و تفاضل را بیابید. اندازهٔ بردار A برابر 4 و اندازهٔ بردار B برابر 3 و کسینوس زاویهٔ 70 درجه برابر 0.34 است.



شکل V-الف-۱۱

پاسخ: در این مسئله با دو بردار مواجهیم و هدف تنها یافتن اندازهٔ بردارهای برایند و تفاضل است، ازاین‌رو با استفاده از رابطه، به این امر مبادرت می‌ورزیم.

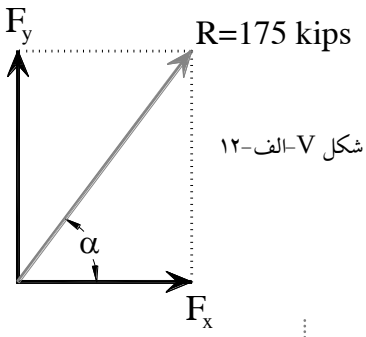
نخست بردار برایند:

$$|R| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\alpha} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (2\times4\times3\times0.34)} \Rightarrow \boxed{|R| \approx 5.75}$$

سپس بردار تفاضل:

$$|R'| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\alpha} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 - (2\times4\times3\times0.34)} \Rightarrow \boxed{|R'| \approx 4.10}$$

تمرین الف-۷: در تصویر مقابل، زاویهٔ α را به قسمی تعیین کنید که مؤلفهٔ F_y برابر 50kips شود.



شکل V-الف-۱۲

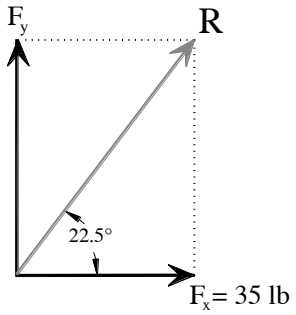
پاسخ: بنا بر آنچه در کلاس توضیح داده شد، به این علت که مؤلفهٔ F_y اصطلاحاً دور از زاویه است، مقدار آن برابر است با:

$$F_y = R\sin\alpha$$

بنابراین:

$$F_y = 175\sin\alpha \Rightarrow 50 = 175\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{50}{175} \approx 0.28$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin 0.28 \approx \boxed{16.6^\circ}$$



شکل V-الف-۱۳

تمرین الف-۸: در شکل V-الف-۱۳، بزرگی مؤلفهٔ F_y چقدر است؟

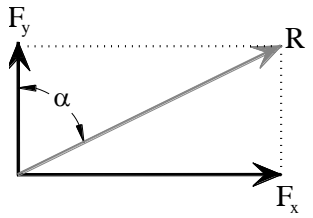
$(\sin 22.5^\circ \approx 0.38$ و $\cos 22.5^\circ \approx 0.92)$

پاسخ:

$$F_x = R\cos\alpha \Rightarrow 35 = R.\cos 22.5^\circ \Rightarrow 35 = R\times 0.92 \Rightarrow R \approx 38.04\,lb$$

اکنون که مقدار بردار اصلی به‌دست آمد، به سراغ یافتن مؤلفهٔ F_y می‌رویم:

$$F_y = R\sin\alpha \Rightarrow F_y = 38.04\times\sin 22.5^\circ \Rightarrow F_y = 38.04\times 0.38 \Rightarrow \boxed{F_y \approx 14.45\ lb}$$



شکل V-الف-۱۴

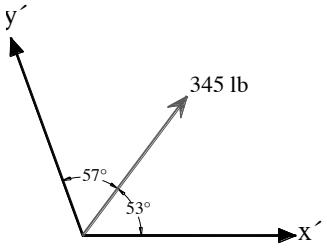
تمرین الف-۹: در شکل V-الف-۱٤ اگر مؤلفهٔ F_x دو برابر مؤلفهٔ F_y باشد، زاویهٔ α برابر است با:

پاسخ:

$$F_x = R\sin\alpha\ ,\ F_y = R\cos\alpha$$

$$F_x = 2F_y \Rightarrow R\sin\alpha = 2R\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow \tan\alpha = 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan 2 \Rightarrow \boxed{\alpha \approx 63.5^\circ}$$



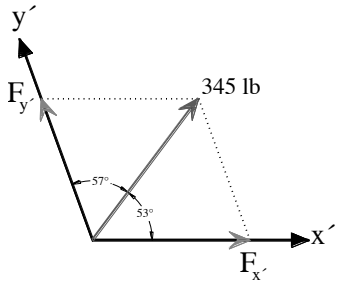
شکل V-الف-۱۵

تمرین الف-۱۰: بردار 345lb شکل V-الف-۱۵ را بر روی دو محور غیرمتعامد x' و y' تجزیه کنید.

$\sin 70^\circ \approx 0.94$, $\sin 57^\circ \approx 0.84$, $\sin 53^\circ \approx 0.8$

پاسخ: برای تجزیهٔ بردار به دو مؤلفه، از انتهای بردار به موازات هریک از محورها خطی رسم می‌کنیم تا محور دیگر را قطع نماید. سپس از مبدأ مختصات به این نقاط تقاطع، بردارهای جدیدی رسم می‌کنیم که نمایانگر مؤلفه‌های بردار اصلی‌اند.

حال با استفاده از این سه بردار یعنی بردار 345lb و مؤلفه‌های آن یعنی $F_{x'}$ و $F_{y'}$ یک مثلث تشکیل داده و در این مثلث قانون سینوس‌ها را اعمال می‌کنیم (شکل V-الف-۱۸).

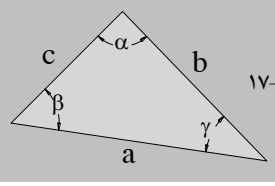


شکل V-الف-۱۶

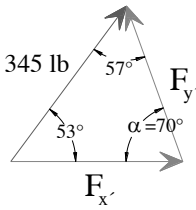
قانون سینوس‌ها در مثلث این مطلب را بیان می‌کند:

حاصل تقسیم اندازهٔ هر ضلع مثلث به سینوس زاویهٔ **مقابل** خود با نسبت مشابه برای سایر اضلاع برابر است (شکل V-الف-۱۷).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



شکل V-الف-۱۷



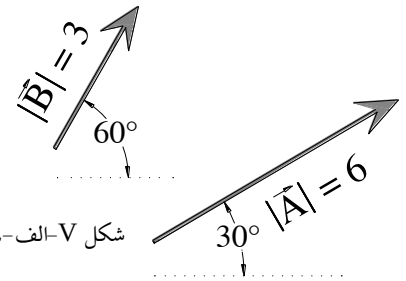
شکل V-الف-۱۸

$$\frac{345lb}{\sin 70^\circ} = \frac{F_{x'}}{\sin 57^\circ} = \frac{F_{y'}}{\sin 53^\circ}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{345\,lb}{Sin70^\circ}=\frac{F_{x'}}{Sin57^\circ} \Rightarrow \frac{345\,lb}{0.94}=\frac{F_{x'}}{0.84} \Rightarrow \boxed{F_{x'}\approx 308\,lb}$$

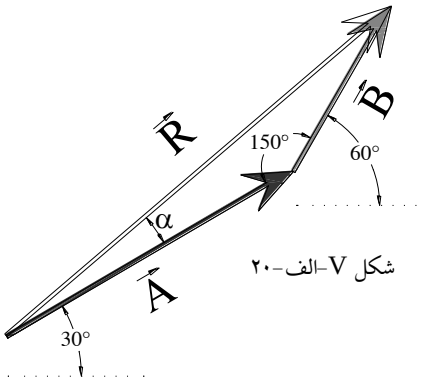
$$\frac{345\,lb}{Sin70^\circ}=\frac{F_{y'}}{Sin53^\circ} \Rightarrow \frac{345\,lb}{0.94}=\frac{F_{y'}}{0.8} \Rightarrow \boxed{F_{y'}\approx 294\,lb}$$



شکل V-الف-۱۹

تمرین الف -۱۱: اندازهٔ برایند دو بردار شکل V-الف-۱۹ مقابل چقدر بوده و راستای آن با افق چه زاویه‌ای می‌سازد؟

پاسخ: برای حل این مسئله، از دو روش می‌توان استفاده نمود. همان‌گونه که در پویانمایی (همان animation خودمان!) در کلاس درس مشاهده شد، روش نخست بهره‌گیری از روش مثلث و متوازی‌الاضلاع و روش دوم تجزیهٔ بردارها به مؤلفه‌هاست که روش دوم گرچه طولانی‌تر اما با خطای کمتری توأم است.



شکل V-الف-۲۰

الف- نخست با استفاده از رابطهٔ برایند:

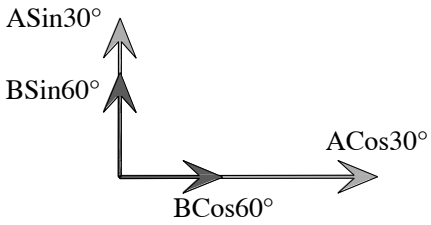
$$R=\sqrt{|A|^2+|B|^2+2|A|.|B|.Cos\alpha}=\sqrt{6^2+3^2+2(6)(3)Cos30^\circ}$$

$$=\sqrt{36+9+2\times6\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\approx\sqrt{76.17}\approx\boxed{8.72}$$

اکنون با استفاده از قانون سینوس‌ها در مثلث، زاویهٔ برایند را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{|\vec{R}|}{Sin150^\circ}=\frac{|\vec{B}|}{Sin\alpha} \Rightarrow Sin\alpha=\frac{3\times0.5}{8.72}=0.17 \Rightarrow \alpha\approx9.9^\circ$$

بنابراین، زاویهٔ راستای بردار برایند با افق، برابر $\boxed{30+9=39.9^\circ}$ خواهد بود.



شکل V-الف-۲۱

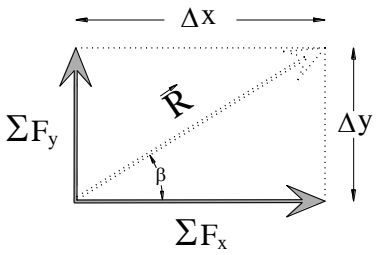
ب- روش دوم به روش تجزیه:

$$\sum F_x=BCos60^\circ+ACos30^\circ=(3\times\frac{1}{2})+(6\times\frac{\sqrt{3}}{2})\approx6.7$$

$$\sum F_y=BSin60^\circ+ASin30^\circ=(3\times\frac{\sqrt{3}}{2})+(6\times\frac{1}{2})\approx5.6$$

پس اندازهٔ بردار برایند برابر خواهد بود با اندازهٔ برایند این دو:

$$R=\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}=\sqrt{6.7^2+5.6^2}=\sqrt{76.17}\approx\boxed{8.72}$$



شکل V-الف-۲۲

اکنون اقدام به یافتن زاویهٔ بردار برایند با راستای افق می‌کنیم. می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، تانژانت هر زاویه برابر است با حاصل تقسیم اندازهٔ ضلع مقابل به ضلع مجاور. پس:

$$tg\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sum F_y}{\sum F_x}=\frac{5.6}{6.7}=0.83 \Rightarrow tg\beta=0.83 \Rightarrow \boxed{\beta=39.9^\circ}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، پاسخ‌های به‌دست آمده از این روش با نتایج روش پیشین، کاملاً مشابه است.

تمرین الف-۱۲: مجموع بردارهای $\vec{CE}$، $\vec{BC}$ و $-\vec{BD}$ را بیابید.

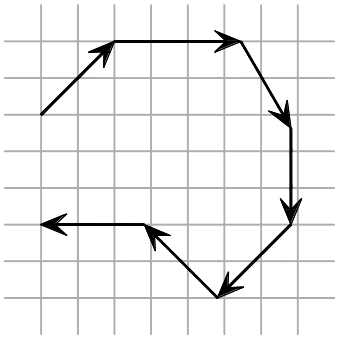
پاسخ:

$$\vec{R}=\vec{CE}+\vec{BC}-\vec{BD} \quad , \quad -\vec{BD}=\vec{DB} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}=\vec{CE}+\vec{BC}+\vec{DB} \quad , \quad \vec{DB}+\vec{BC}=\vec{DC}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{CE} + \vec{DC} \quad , \quad \vec{DC} + \vec{CE} = \vec{DE} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = \vec{DE}}$$

البته از طریق ترسیمی هم (که در کلاس شرح داده شد) نیز می‌توانید به پاسخ برسید.

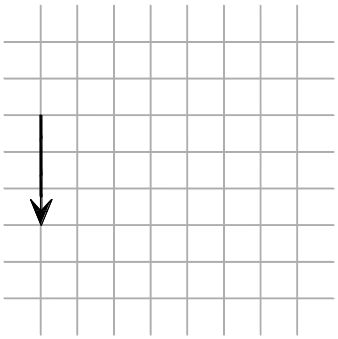
تمرین الف-۱۳: اگر در شکل V-الف-۲۳، هر خانه از شبکه معرف 5m باشد، برایند بردارهای مقابل چه اندازه‌ای خواهد داشت؟



شکل V-الف-۲۳

پاسخ: هنگامی که تعدادی بردار به دنبال هم ترسیم می‌شوند، به منظور یافتن برایند کل، می‌توان از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر وصل نمود و این بردار جدید، معرف برایند کل است (قانون مثلث در یافتن برایند).

بنابراین، بردار برایند را می‌توان در شکل V-الف- ۲۴ مشاهده نمود که اندازه‌ای برابر 15 متر دارد.



شکل V-الف-۲۴

تمرین الف-۱۴: اگر $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$؛ مطلوب است:

الف) $\vec{A} + \vec{B}$ ب) $\vec{A} - \vec{B}$ ج) اندازهٔ بردار A د) اندازهٔ بردار B

پاسخ:

الف) $\vec{A} + \vec{B} = (2+1)\vec{i} + (3+3)\vec{j} + (-3+1)\vec{k} = \boxed{3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}}$

ب) $\vec{A} - \vec{B} = (2-1)\vec{i} + (3-3)\vec{j} + (-3-1)\vec{k} = \boxed{\vec{i} - 4\vec{k}}$

ج) $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \boxed{\sqrt{22}}$

د) $|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{11}}$

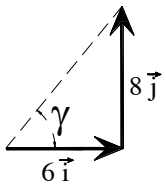
تمرین الف-۱۵: اگر $\vec{A} = 4\vec{i} + 1.5\vec{j}$ و $\vec{B} = 2\vec{i} + 6.5\vec{j}$؛ مطلوب است اندازهٔ بردار برایند این دو و همچنین زاویه‌ای که این بردار برایند با محور xها می‌سازد.

پاسخ:

$$\vec{A} + \vec{B} = (4+2)\vec{i} + (1.5+6.5)\vec{j} = \boxed{6\vec{i} + 8\vec{j}}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

$$tg\gamma = \frac{8}{6} = 1.\overline{3} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \boxed{53^\circ}$$



تمرین الف-۱۶: چهار بردار زیر بر یک جسم اثر کرده‌اند. تعیین کنید مقادیر a و b را به‌قسمی‌که جسم یادشده متعادل باشد.

$\vec{F_1} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{F_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{F_3} = a\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{F_4} = -5\vec{i} + b\vec{j}$

پاسخ:

به منظور متعادل ماندن جسم، می‌بایست برایند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد. پس:

$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=0 \Rightarrow (2+2+a-5)\vec{i}+(-1+3+1+b)\vec{j}=0 \Rightarrow (a-1)\vec{i}+(3+b)\vec{j}=0$

$\Rightarrow \boxed{a=1 \quad , \quad b=-3}$

تمرین الف-۱۷: اگر $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}$ ، $\vec{B}=\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{C}=2\vec{i}+4\vec{j}$ باشند، تعیین کنید:

الف- بردار برایند این سه بردار

ب- $\vec{C}-\vec{A}$

ج- $2\vec{B}+\vec{A}$

د- $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$

پاسخ:

الف- $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=4\vec{i}+4\vec{j}$

ب- $\vec{C}-\vec{A}=\vec{i}+3\vec{j}$

ج- $2\vec{B}+\vec{A}=(2\vec{i}-2\vec{j})+(\vec{i}+\vec{j})=3\vec{i}-\vec{j}$

د- $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}=-4\vec{j}$

تمرین الف-۱۸: مطلوب است یافتن بردارهای برایند و تفاضل دو بردار $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{B}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$، همچنین اندازهٔ عددی دو بردار برایند و تفاضل یادشده.

پاسخ:

بردار برایند	$\vec{R}=3\vec{i}+3\vec{k}$
بردار تفاضل	$\vec{R'}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$
اندازهٔ عددی بردار برایند	$\sqrt{\vec{R}}=\sqrt{(3^2+3^2)}=\sqrt{18}$
اندازهٔ عددی بردار تفاضل	$\sqrt{\vec{R'}}=\sqrt{(1^2+(-2)^2+(-1)^2)}=\sqrt{6}$

تمرین الف-۱۹: مطلوب است تفاضل دو بردار $\vec{A}=-3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ و $\vec{B}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

پاسخ:

$\vec{A}-\vec{B}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \sqrt{\vec{A}-\vec{B}}=\sqrt{(-5)^2+1^2+2^2}=\sqrt{30}$

$\vec{B}-\vec{A}=+5\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k} \Rightarrow \sqrt{\vec{B}-\vec{A}}=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{30}$

تمرین الف-۲۰: اگر $\vec{A}=3k\bar{a}+m\bar{b}$ و $\vec{B}=2n\bar{a}+4p\bar{b}$ باشد، تعیین کنید بردارهای $\vec{A}+\vec{B}$ ، $\vec{A}-\vec{B}$ و $3\vec{A}-4\vec{B}$.

پاسخ:

$\vec{B}+\vec{A}=(3k+2n)\bar{a}+(m+4p)\bar{b}$

$\vec{A}-\vec{B}=(3k-2n)\bar{a}+(m-4p)\bar{b}$

$3\vec{A}-4\vec{B}=(9k-8n)\bar{a}+(3m-16p)\bar{b}$

تمرین الف-۲۱: اگر زاویهٔ بین مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر 30 درجه باشد. حال آنکه $|\overrightarrow{AB}|=6$ و اندازهٔ یکی از این مؤلفه‌ها برابر $\sqrt{3}$ باشد، مطلوب است تعیین اندازهٔ مؤلفهٔ دیگر.

پاسخ: چنانچه مؤلفه‌ها را x و y بنامیم، برایند مؤلفه‌های هر بردار درحقیقت تشکیل‌دهندهٔ خود بردار است:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2|\vec{x}|\times|\vec{y}|\times\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad 6=\sqrt{(\sqrt{3})^2+|\vec{y}|^2+(2\times\sqrt{3}\times|\vec{y}|\times\frac{\sqrt{3}}{2})} \quad\Rightarrow\quad 6=\sqrt{3+|\vec{y}|^2+3|\vec{y}|}$$

طرفین را به توان دو می‌رسانیم تا رادیکال از میان برود:

$$\Rightarrow\quad 36=|\vec{y}|^2+3|\vec{y}|+3 \quad\Rightarrow\quad |\vec{y}|^2+3|\vec{y}|-33=0$$

اکنون با یک معادلهٔ درجهٔ دوم روبه‌رو هستیم. برای به‌دست آوردن اندازهٔ مؤلفهٔ y، از روش «دلتا» برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac \quad\Rightarrow\quad \Delta=3^2-4(1)(-33)=141 \quad , \quad |\vec{b}|=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Rightarrow\quad |\vec{b}|=\frac{-3\pm11.8}{2} \quad\Rightarrow\quad |\vec{b}|=-7.4 \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

$$|\vec{b}|=\boxed{4.4}$$

تمرین الف-۲۲: اگر نقاط B و C بر هم منطبق باشند، تعیین کنید عدد k را چنانچه رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(k-1)\overrightarrow{CA}$$

پاسخ:

اگر نقاط B و C بر هم منطبق باشند، یعنی عملاً این‌دو، یک نقطه هستند و ازاین‌رو، اندازهٔ بردارهای BC و CB برابر صفر خواهد بود. می‌توان فرض نمود که $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$؛ پس:

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(k-1)\overrightarrow{CA} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=(k-1)\overrightarrow{CA} \quad\Rightarrow\quad 2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=(k-1)\overrightarrow{CA} \quad\Rightarrow\quad 2\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow\quad 2\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CA} \quad\Rightarrow\quad 2\overrightarrow{BC}=(k-2)\overrightarrow{CA} \quad , \quad \overrightarrow{BC}=0 \quad\Rightarrow\quad (k-2)\overrightarrow{CA}=0$$

$$\Rightarrow\quad k-2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=2}$$

تمرین الف-۲۳: مجموع (برایند) بردارهای AB، CA، DA- و DC را تعیین کنید.

پاسخ:

همان‌گونه که در کلاس توضیح داده شد، دو روش برای حل چنین مسائلی پیش‌رو داریم. یکی روش جبر برداری و دیگری روش ترسیمی.

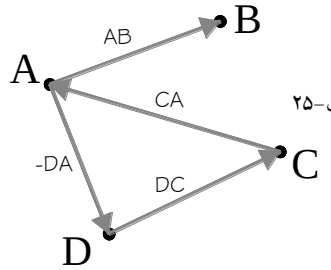
الف- روش نخست: از طریق جبر برداری و نوعی بازی با بردارها برای ساده‌تر ساختن عبارت‌های برداری:

$$\vec{R}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \quad , \quad \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC} \quad\Rightarrow\quad \vec{R}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}$$

$$, \quad \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{R}=\boxed{\overrightarrow{AB}}$$

ب- روش دوم: نقاطی فرضی را در فضا مجسم نموده و بردارهای موجود را ترسیم می‌کنیم:

ملاحظه می‌کنید که اگر در شکل V-الف-۲۵ از نقطهٔ A آغاز به پیمایش نموده، به نقطهٔ B می‌رسیم و همان‌طور که در کلاس اثبات شد، روشی سریع برای به‌دست آوردن حاصل مجموع جبری است.



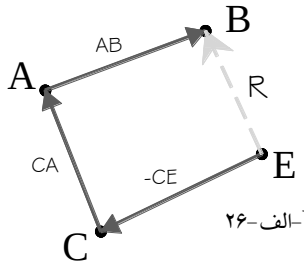
شکل V-الف-۲۵

تمرین الف-۲۴: مجموع (برایند) بردارهای AB، CA و CE- را بیابید.

پاسخ:

الف- روش نخست: از طریق جبر برداری:

$\vec{R}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{EA}$ $\Rightarrow$ $\vec{R}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EB}$ $\Rightarrow$ $\vec{R}=\boxed{\overrightarrow{EB}}$



شکل V-الف-۲۶

ب- روش دوم: نقاطی فرضی را در فضا مجسم نموده و بردارهای موجود را ترسیم می‌کنیم:
چنان‌که از شکل V-الف-۲۶ برمی‌آید، از نقطهٔ E پیمایش را آغاز نموده و تا به نقطهٔ B به انجام می‌رسانیم.
بنابراین، برایند این سه بردار را می‌توان بردار EB تلقی نمود.

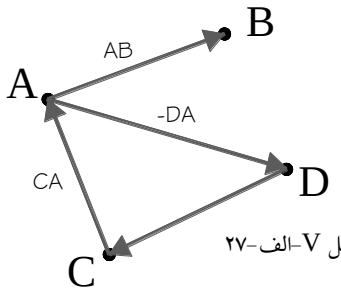
تمرین الف-۲۵: مطلوب است تعیین مجموع (برایند) بردارهای AB، CA، DA– و DC.

پاسخ:

الف- روش نخست: از طریق جبر برداری:

$\vec{R}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $\vec{R}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}$

, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=0$ $\Rightarrow$ $\vec{R}=\boxed{\overrightarrow{AB}}$



شکل V-الف-۲۷

ب- روش دوم: نقاطی فرضی را در فضا مجسم نموده و بردارهای موجود را ترسیم می‌کنیم:
چنان‌که از شکل V-الف-۲۷ برمی‌آید، برایند سه بردار CA، DC و DA– برابر صفر شده و تنها بردار AB است که باقی می‌ماند. یعنی چنانچه از نقطهٔ A آغاز به پیمایش کنیم، درنهایت به نقطهٔ B می‌رسیم.

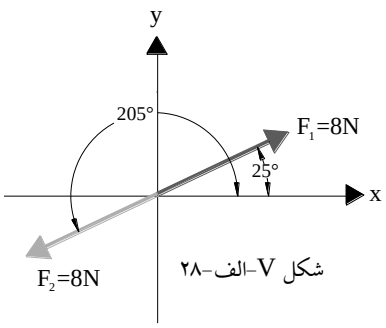
تمرین الف-۲۶: چنانچه برایند دو بردار به بزرگی 6F و 10F برابر 14F باشد، زاویهٔ بین این دو بردار چند درجه است؟

پاسخ:

$|\vec{R}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $14=\sqrt{36+100+2\times6\times10\times\cos\alpha}$ $\Rightarrow$ $14^2=136+120\cos\alpha$

$\Rightarrow$ $60=120\cos\alpha$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha=0.5$ $\Rightarrow$ $\alpha=\boxed{60^\circ}$

تمرین الف-۲۷: اگر یک نقطهٔ مادی در حالت تعادل بوده و تحت تأثیر دو نیروی F_1 و F_2 باشد؛ درصورتی‌که نیروی $F_1=8N$ و راستای آن با افق دارای زاویهٔ 25° باشد، مقدار عددی نیروی F_2 و راستای آن‌را تعیین نمایید.



شکل V-الف-۲۸

پاسخ: به‌سادگی می‌توان دریافت که برای خنثی شدن اثر دو نیرو، می‌بایست این دو بردار متقابل باشند یعنی با راستا و اندازهٔ یکسان اما در خلاف جهت یکدیگر. بنابراین کافی است بردار دوم دارای اندازهٔ 8N و با زاویهٔ 205 درجه نسبت به جهت مثبت محور xها (شکل V-الف-۲۸ را ببینید).

تمرین الف-۲۸: مجموع بردارهای EF، DE، 2CD و CF– را بیابید.

پاسخ:

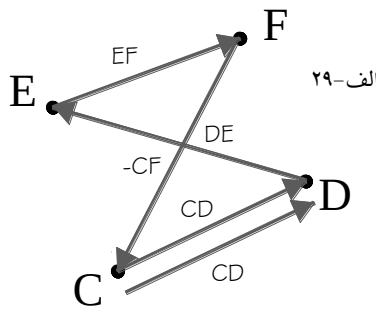
الف- روش نخست: از طریق جبر برداری:

$$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF} \Rightarrow \vec{R}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}+2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CF} \Rightarrow \vec{R}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CF}$$

$$, \quad \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CF} \Rightarrow \vec{R}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CF}=\boxed{\overrightarrow{CD}}$$

ب- روش دوم: روش ترسیمی:

به شکل V-الف-۲۹ دقت بفرمایید. اگر از نقطهٔ D به سمت E پیمایش را آغاز کنیم، در نهایت به همان D می‌رسیم. پس حاصل جمع سه بردار DE، EF، FC (یا همان-CF) و یکی از بردارهای CD برابر خواهد بود با صفر. بنابراین، تنها یک بردار CD باقی خواهد ماند.



شکل V-الف-۲۹

تمرین الف-۲۹: **مجموع بردارهای 4PE، 8FQ، 3EP، EF و 7PF را بیابید.**

پاسخ:

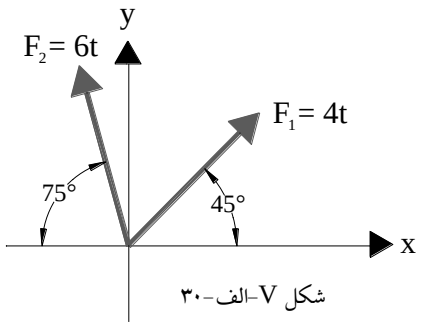
$$\vec{R}=4\overrightarrow{PE}+8\overrightarrow{FQ}+3\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EF}+7\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PE}+3\overrightarrow{PE}+3\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EF}+7\overrightarrow{PF}+7\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{FQ}$$

$$=\overrightarrow{PE}+3(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EP})+\overrightarrow{EF}+7(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FQ})+\overrightarrow{FQ} \quad , \quad \overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EP}=0 \quad , \quad \overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{PQ}$$

$$\Rightarrow \vec{R}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EF}+7\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{FQ} \ , \ \overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}=\overrightarrow{PF}+7\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{FQ} \ , \ \overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{PQ}$$

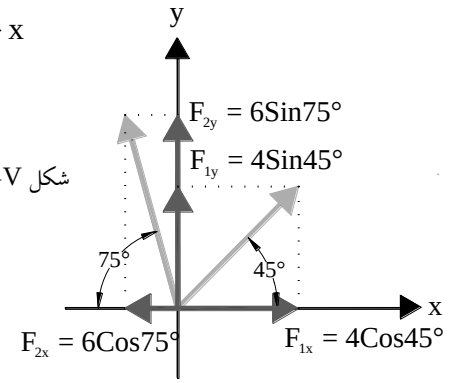
$$\Rightarrow \vec{R}=\overrightarrow{PQ}+7\overrightarrow{PQ}=\boxed{8\overrightarrow{PQ}}$$

تمرین الف-۳۰: **اگر یک نقطهٔ مادی مطابق شکل V-الف-۳۰ تحت تأثیر دو نیـروی F_1 و F_2 باشد، چه نیروی سومی و در چه جهتی بر آن وارد شود تا در حـال تعـادل باشد؟** ($\cos 75° \approx 0.25$ و $\sin 75° \approx 0.96$)



شکل V-الف-۳۰

پاسخ: بهترین روش آن است که بردارها را به مؤلفه‌های خود تجزیه کنیم (شکل V-الف-۳۱) و بین مؤلفه‌ها در راستای محورهای مختصات، برایند بگیریم و ببینیم چه نیروهایی لازم است تا این برایندها صفر شود.



شکل V-الف-۳۱

$$\sum F_x = 4\cos 45^\circ - 6\cos 75^\circ = 1.3$$

$$\sum F_y = 4\sin 45^\circ + 6\sin 75^\circ = 8.6$$

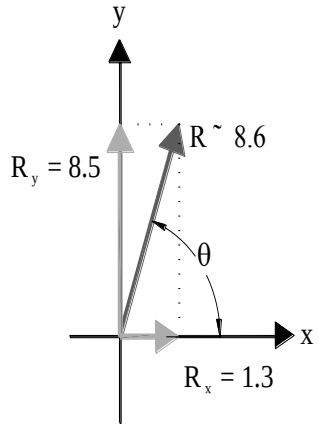
بنابراین، باید نیروی سوم دارای مؤلفهٔ افقی به انـدازهٔ 1.3 در خلاف جهت محور xها و مؤلفهٔ عمودی 8.5 در خلاف جهت محور yها باشد.

پس اندازهٔ بردار سوم برابر خواهد بود با:

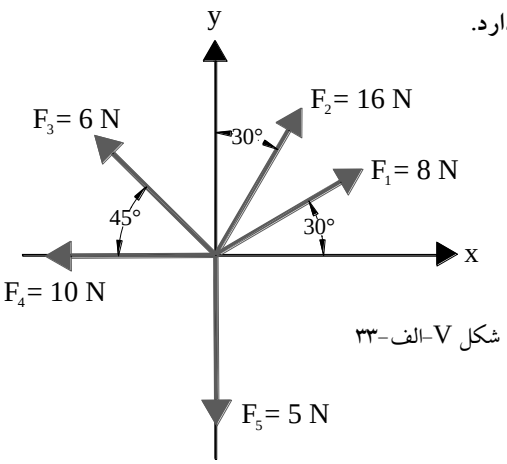
$$|R|=\sqrt{(1.3)^2+(8.6)^2} \approx 8.7$$

برای یافتن زاویه نیز مانند دیگر مسائل پیش‌گفته از تعریف تانژانت استفاده می‌کنیم (شکل V-الف-۳۲):

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{8.6}{1.3}\approx 6.6 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \boxed{81.3^\circ}$$



تمرین الف-۳۱: **یک نقطهٔ مادی مطابق شکل V-الف-۳۳، تحت تأثیر پنج نیـرو قـرار دارد. جهت حرکت این نقطه به کدام سو است؟**



شکل V-الف-۳۳

پاسخ:

بردارها را به مؤلفه‌های خود تجزیه نموده و و به‌دنبال یافتن برایند این بردارها گام برمی‌داریم:

$$\sum F_x = 8\cos 30^\circ + 16\sin 30^\circ - 6\cos 45^\circ - 10 \approx 0.7$$

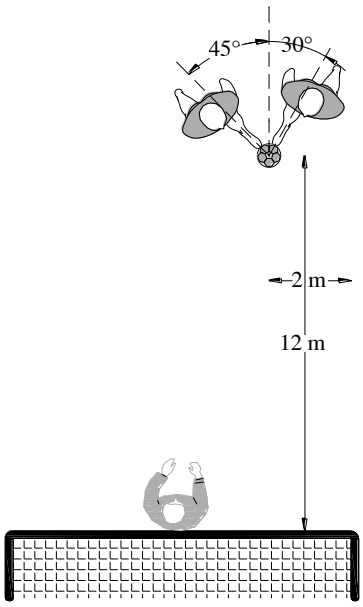
$$\sum F_y = 8\sin 30^\circ + 16\cos 30^\circ + 6\sin 45^\circ - 5 \approx 17$$

حال که مؤلفه‌ها را در دست داریم، جهت حرکت را می‌یابیم. θ را زاویهٔ بـردار برایـند بـا محـور xها فرض می‌کنیم:

$$tg\theta = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{17}{0.7} \approx 24.3 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx \boxed{87.65^\circ}$$

بنابراین این نقطه با زاویه‌ای حدود 87.65 درجه نسبت به جهت مثبت محور xها (نزدیک به راستای محور yها) حرکت خواهد نمود.

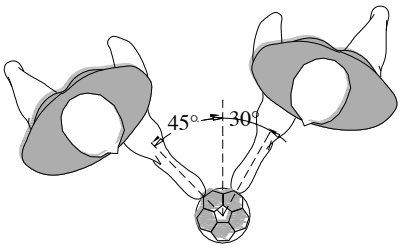
☆ **تمرین الف-۳۲:** **در تصویر زیر (شکل‌های V-الف-۳٤ و ۳۵)، دو فوتبالیست با نیروهای برابر به توپ ضربه می‌زنند. تعیین کنید کـه تـوپ وارد دروازه خواهد شد یا خیر؟** (از اصطکاک توپ با زمین صرفنظر کنید)



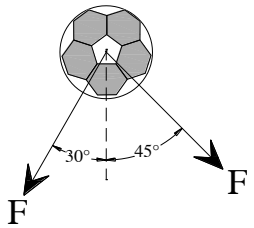
شکل V-الف-۳۴

پاسخ: برای پاسخ دادن به این مسئله بایستی جهت نیروی برایند نیروهای وارد بر توپ از طـرف بازیکنـان را برآورد کنیم تا بتوان پیش‌بینی نمود که توپ در کدام راستا حرکت خواهد کرد.

برای این منظور، ابتدا نمودار جسم آزاد توپ را ترسیم می‌کنیم (شکل V-الف-۳۶):



شکل V-الف-۳۵



شکل V-الف-۳۶

بردار برایند را ترسیم می‌نماییم (شکل V-الف-۳۷):

از قانون سینوس‌ها در مثلث OAC در شکل V-الف-۳۷ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{OA}{\sin\theta} \quad , AC = OA = F \Rightarrow \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\theta} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\theta}$$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، مجموع دو زاویـهٔ مجـاور برابـر 180 درجـه اسـت؛ بنـابراین در متـوازی الاضلاع OACB:

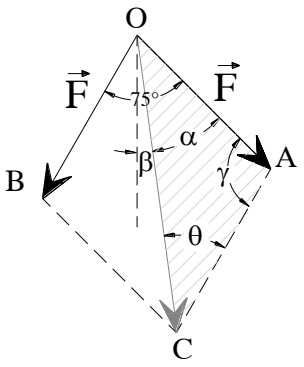
$$\hat{\gamma} + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\gamma} = 105^\circ$$

با توجه به این قاعده که در مثلث، مجموع زوایـای داخلـی برابـر 180 درجـه اسـت، در مثلـث OAC داریم:

$$\hat{\gamma} + \hat{\alpha} + \hat{\theta} = 180^\circ \ , \ \hat{\alpha} = \hat{\theta} \ , \ \hat{\gamma} = 105^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 37.5^\circ$$

حال می‌توان راستای حرکت توپ را پیش‌بینی کرد:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 45^\circ \Rightarrow \hat{\beta} = 7.5^\circ$$



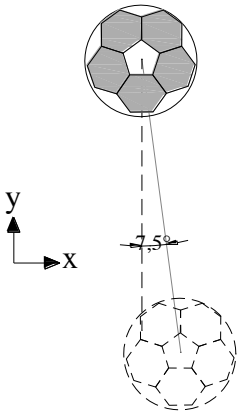
شکل V-الف-۳۷

حال باید بررسی نمود که ایا توپ وارد دروازه خواهد شد یا خیر. توپ در جهت عرضی تنها می‌تواند 2m جابه‌جایی داشته باشد تا در چارچوب دروازه واقع شود. اکنون محاسبه می‌کنیم که به ازای طی مسافت 12m تا دهانهٔ دروازه، توپ چه مقدار جابه‌جایی عرضی خواهد داشت.

از مثلث فرضی که از حرکت توپ به سمت دروازه حاصل می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$\text{Tan}7.5^\circ = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad , \Delta y = 12\text{m} \quad , \text{Tan}7.5^\circ = 0.131$$

$$\Rightarrow 0.131 = \frac{\Delta x}{12} \Rightarrow \boxed{\Delta y \approx 1.57\text{m}}$$



شکل V-الف-۳۸

بنابراین، توپ با طی مسافت 12m به سمت دروازه، 1.57m جابه‌جایی عرضی خواهد داشت و با این اوصاف توپ وارد دروازه می‌شود. البته از مهارت دروازه‌بان چشم پوشیدیم!

طرح این پرسش، حس نوستالوژی Tsubasa Ozora و Taro Misaki را زنده کرد!

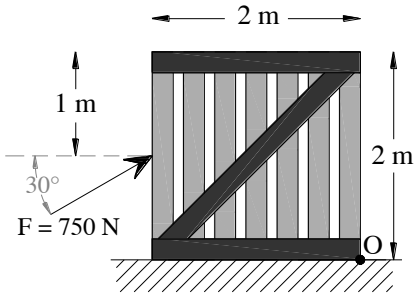
تمرین الف-۳۳: برای تمرین قبل، فاصلهٔ توپ از خط دروازه (فاصلهٔ شوت‌زنان) را به قسمی تعیین نمایید تا توپ به دیرک دروازه اصابت نماید.

پاسخ: تمام شرایط این مسئله، مانند مسئلهٔ پیشین است به استثنای فاصلهٔ توپ از دروازه. در این تمرین باید دید که حداکثر فاصلهٔ عمودی که توپ می‌تواند داشته باشد تا با زاویهٔ حرکت 7.5 درجه در جهت عرضی 2m مسافت طی کند، چقدر است.

$$\text{Tan}7.5^\circ = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad , \Delta x = 2\text{m} \quad , \text{Tan}7.5^\circ = 0.131$$

$$\Rightarrow 0.131 = \frac{2}{\Delta y} \Rightarrow \boxed{\Delta y \approx 15.26\text{m}}$$

بنابراین، چنانچه توپ از خط دروازه فاصله‌ای حدود 15.26m داشته باشد، به دیرک دروازه اصابت خواهد نمود.



شکل V-الف-۳۹

☆ **تمرین الف-۳۴: جعبه‌ای به وزن 350N و ابعاد 2m بر روی سطحی قرار دارد. به آن نیرویی به بزرگی 750N و در راستایی که با افق زاویهٔ 30 درجه می‌سازد، وارد می‌آوریم. برای جعبه چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ از زمین کاملاً بلند می‌شود؟ تنها به حرکت افقی در می‌آید؟ یا حول نقطهٔ O دوران می‌کند؟**

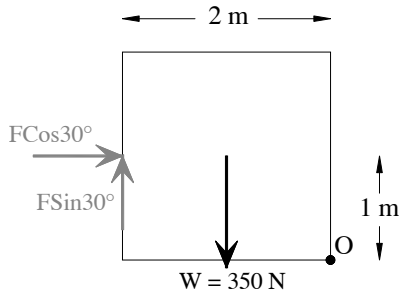
پاسخ: نخست نمودار جسم آزاد جعبه را ترسیم می‌کنیم. نیروی 750 نیوتنی را هم به دو مؤلفهٔ افقی و عمودی تجزیه می‌کنیم. برای جعبه سه کیفیت ممکن است رخ دهد:

الف) چنانچه مؤلفهٔ عمودی نیروی 750 نیوتنی از وزن جعبه بیشتر باشد، جعبه از زمین بلند می‌شود.

ب) اگر اثر چرخشی (گشتاور) نیروی 750 نیوتنی بیش از اثر چرخشی وزن جعبه حول نقطهٔ O باشد، جعبه حول این نقطه دوران می‌کند.

ج) اگر هیچ‌یک از موارد بالا رخ ندهد، جعبه تنها به حرکت افقی درمی‌آید. (البته از مقدار اصطکاک ایستایی صرفنظر کردیم)

ابتدا مؤلفه‌های نیروی 750 نیوتنی را محاسبه می‌کنیم:



شکل V-الف-۴۰

$$F_x = F\cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 750 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 649N$$

$$F_y = F\sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 750 \times 0.5 = 375N$$

با توجه به اینکه مؤلفهٔ عمودی نیروی وارد بر جعبه از وزن آن بیشتر است (350 < 375)، جعبه از زمین بلند خواهد شد.

تمرین الف-۳۵: تمرین قبل را برای نیروی 400N حل کنید.

پاسخ: نخست مؤلفه‌های نیروی 400 نیوتنی را محاسبه می‌کنیم:

$$F_x = F\cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 400 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 346N$$

$$F_y = F\sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 400 \times 0.5 = 200N$$

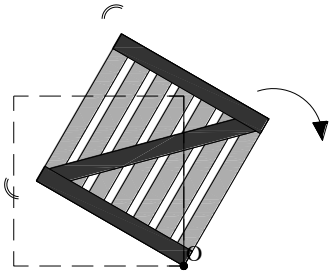
چون مؤلفهٔ قائم نیروی وارد بر جعبه از وزن آن کمتر است (350 > 200)، جعبه کاملاً از زمین بلند نخواهد شد. اکنون اثر چرخشی را بررسی می‌کنیم. ابتدا اثر چرخشی نیروی F را حول نقطهٔ O محاسبه می‌کنیم:

$$\sum M_{O_F} = -(F\cos 30^\circ \times 1) - (F\sin 30^\circ \times 2) = -346 - 400 = -746.4 \ N.m$$

سپس اثر چرخشی نیروی وزن جعبه را:

$$\sum M_{O_W} = +(350 \times 1) = 350 \ N.m$$

ملاحظه می‌شود اثر چرخشی نیروی وزن جعبه از اثر چرخشی نیروی خارجی 400 نیوتنی کمتر است و بنابراین جعبه مطابق شکل مقابل حول نقطهٔ O دوران خواهد نمود تا بر روی سطح دیگر خود بر زمین افتد.



شکل V-الف-۴۱

تمرین الف-۳۶: تمرین الف-۳۵ را برای نیروی 180N حل کنید.

پاسخ: نخست مؤلفه‌های نیروی 180 نیوتنی را محاسبه می‌کنیم:

$$F_x = F\cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 180 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 155.8 \ N$$

$$F_y = F\sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 180 \times 0.5 = 90 \ N$$

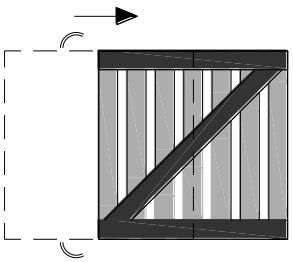
چون مؤلفهٔ قائم نیروی وارد بر جعبه از وزن آن کمتر است (350 > 90)، جعبه کاملاً از زمین بلند نخواهد شد. اکنون اثر چرخشی را بررسی می‌کنیم. ابتدا اثر چرخشی نیروی F را حول نقطهٔ O محاسبه می‌کنیم:

$$\sum M_{O_F} = -(F\cos 30^\circ \times 1) - (F\sin 30^\circ \times 2) = -155.8 - 180 = -335.8 \ N.m$$

سپس اثر چرخشی نیروی وزن جعبه را:

$$\sum M_{O_W} = +(350 \times 1) = 350 N.m$$

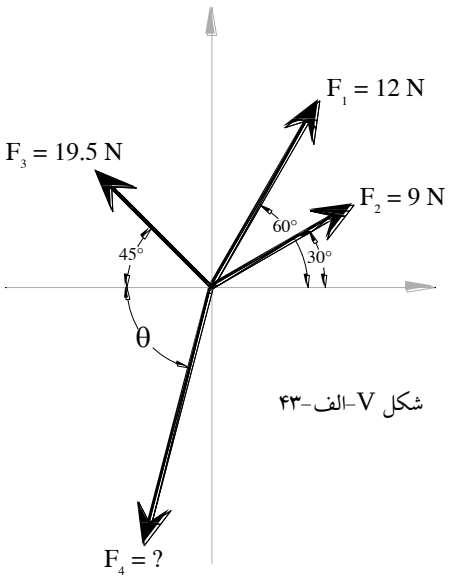
ملاحظه می‌شود اثر چرخشی نیروی وزن جعبه از اثر چرخشی نیروی 190 نیوتنی بیشتر است (350 > 335.8) و بنابراین جعبه حول نقطهٔ O دوران نخواهد کرد و تنها مطابق شکل V-الف-۴۲، به حرکت افقی واداشته می‌شود.



شکل V-الف-۴۲

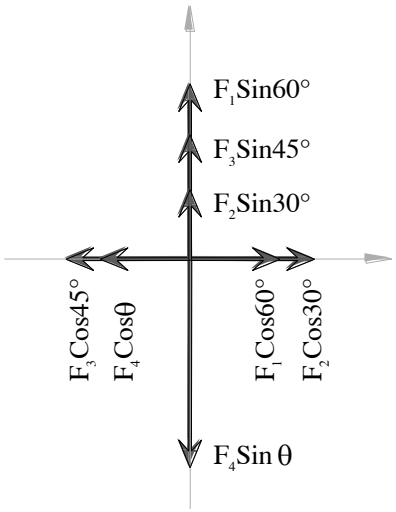
توجه: البته ممکن است جعبه حرکت افقی نیز نداشته باشد. برای بررسی کامل این امر باید از ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و زمین مطلع باشیم که به این علت که این حوزه، در چارچوب برنامهٔ درسی نیست، از آن صرفنظر می‌کنیم.

تمرین الف-۳۷: در شکل V-الف-۴۳ مقدار بردار F_4 و زاویهٔ θ چقدر باشد تا برایند مجموعهٔ بردارها صفر باشد؟ ($\sqrt{3}\approx 1.7$ و $\sqrt{2}\approx 1.4$)



شکل V-الف-۴۳

پاسخ: همگی بردارهای موجود در سیستم را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم (شکل V-الف-۳-۳۴).



شکل V-الف-۴۴

سپس برایند مؤلفه‌های واقع بر محور xها و محور yها می‌یابیم:

$$\sum F_x = F_2\cos 30^\circ + F_1\cos 60^\circ - F_3\cos 45^\circ - F_4\cos\theta \;\Rightarrow\; \sum F_x = \left(9\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(12\times\frac{1}{2}\right)-\left(19.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\cos\theta\times F_4\right)$$

$$\sum F_x = 4.5\sqrt{3}+6-9.75\sqrt{2}-\cos\theta F_4$$

$$\sum F_y = F_2\sin s30^\circ + F_1\sin 60^\circ + F_3\sin 45^\circ - F_4\sin\theta \;\Rightarrow\; \sum F_y = \left(9\times\frac{1}{2}\right)+\left(12\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(19.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\sin\theta\times F_4\right)$$

$$\sum F_y = 4.5+6\sqrt{3}+9.75\sqrt{2}-\sin\theta F_4$$

برایند بردارها در راستای هر دو محور را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ چراکه اگر این دو برایند (مؤلفه‌های بردار برایند) صفر باشد، برایند کل نیز برابر صفر خواهد بود.

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; 4.5\sqrt{3}+6-9.75\sqrt{2}-\cos\theta F_4 = 0 \;\Rightarrow\; 7.65+6-13.65-\cos\theta F_4 = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta F_4 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; 4.5+6\sqrt{3}-9.75\sqrt{2}-\sin\theta F_4 = 0 \;\Rightarrow\; 4.5+10.4-13.65-\sin\theta F_4 = 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta F_4 = -1.25 \qquad (2)$$

اکنون رابطهٔ (1) را بر رابطهٔ (2) تقسیم می‌کنیم:

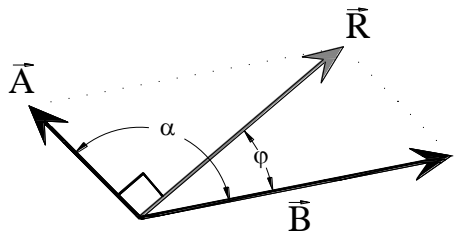
$$\frac{\cos\theta\times F_4}{\sin\theta\times F_4} = \frac{0}{-1.05} \;\Rightarrow\; \operatorname{Cotg}\theta = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\theta = 90^\circ}$$

حال مقدار θ را در رابطهٔ (2) جایگذاری می‌کنیم:

$$\sin\theta\times F_4 = -1.25 \;\Rightarrow\; \sin(90^\circ)\times F_4 = -1.05 \;,\; \sin 90^\circ = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{F_4 = -1.25N}$$

بنابراین باید نیروی F در خلاف جهت تصویرشده و در راستای محور yها باشد (به بیان دیگر، متکی بر محور yها به‌سوی بالا).

☆☆ **تمرین الف-۳۸:** مجموع اندازه‌های دو بردار، برابر $4.8 m/s$ و راستای بردار برایند بر بردار کوچک‌تر عمود شده است. اگر اندازهٔ بردار برایند برابر 2.4 باشد؛ اندازهٔ آن دو بردار و زاویهٔ بین آنها چقدر است؟

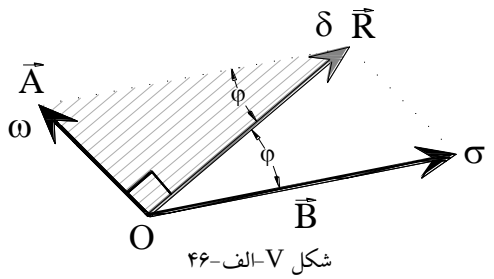


شکل V-الف-۴۵

پاسخ: برای این مثال، یک شکل فرضی متصور می‌شویم (شکل V-الف-۴۵):

بردار برایند بر برادر کوچک‌تر (بردار A) عمود است. رابطهٔ اندازهٔ بردار برایند را می‌نویسیم:

$$|R| = \sqrt{|A|^2+|B|^2+2|A|.|B|.\cos\alpha} = \sqrt{|A|^2+|B|^2+2|A|.|B|.\cos(90+\varphi)}$$



شکل V-الف-۴۶

در مثلث قائم‌الزاویه، سینوس زاویهٔ φ درجه را طبق تعریف به‌دست می‌آوریم (می‌دانیم سینوس زاویه در یک مثلث قائم‌الزاویه عبارت است از حاصل تقسیم اندازهٔ ضلع مقابل به وتر):

$$\mathrm{Sin}\varphi=\frac{|o\omega|}{|\omega\delta|}=\frac{|\vec{A}|}{|\vec{B}|} \Rightarrow |\vec{A}|=|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi$$

از صورت مسئله داریم: $|\vec{A}|+|\vec{B}|=4.8$ پس:

$$|\vec{A}|=|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi \text{ و } |\vec{A}|+|\vec{B}|=4.8 \Rightarrow |\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi+|\vec{B}|=4.8 \Rightarrow |\vec{B}|(1+\mathrm{Sin}\varphi)=4.8 \Rightarrow |\vec{B}|=\frac{4.8}{(1+\mathrm{Sin}\varphi)}$$

بنابراین:

$$|R|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}|.|\vec{B}|.\mathrm{Cos}\alpha}=\sqrt{(|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi)^2+|\vec{B}|^2+2(|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi).|\vec{B}|.\mathrm{Cos}(90+\varphi)}$$

حتماً! از ریاضیات دورهٔ دبیرستان به یاد دارید که: $\mathrm{Cos}(90+\varphi)=-\mathrm{Sin}\varphi$؛ پس:

$$|R|=\sqrt{(|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi)^2+|\vec{B}|^2+2(|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi).|\vec{B}|.(-\mathrm{Sin}\varphi)} \Rightarrow |R|=\sqrt{|\vec{B}|^2\mathrm{Sin}^2\varphi+|\vec{B}|^2-2|\vec{B}|.|\vec{B}|\mathrm{Sin}^2\varphi}$$

طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$|R|^2=|\vec{B}|^2\mathrm{Sin}^2\varphi+|\vec{B}|^2-2|\vec{B}|^2\mathrm{Sin}^2\varphi$$

$$|R|^2=|\vec{B}|^2\mathrm{Sin}^2\varphi+|\vec{B}|^2-2|\vec{B}|^2\mathrm{Sin}^2\varphi \Rightarrow |R|^2=|\vec{B}|^2\left(1-\mathrm{Sin}^2\varphi\right) \Rightarrow 2.4^2=\left(\frac{4.8}{(1+\mathrm{Sin}\varphi)}\right)^2\times\left(1-\mathrm{Sin}^2\varphi\right)$$

$$\left(\frac{4.8}{(1+\mathrm{Sin}\varphi)}\right)^2=\frac{2.4^2}{\left(1-\mathrm{Sin}^2\varphi\right)} \Rightarrow \frac{4.8^2}{(1+\mathrm{Sin}\varphi)^2}=\frac{2.4^2}{\left(1-\mathrm{Sin}^2\varphi\right)} \Rightarrow 2.4^2(1+\mathrm{Sin}\varphi)^2=4.8^2\left(1-\mathrm{Sin}^2\varphi\right)$$

$$(1+\mathrm{Sin}\varphi)^2=4\left(1-\mathrm{Sin}^2\varphi\right) \Rightarrow 1+\mathrm{Sin}^2\varphi+2(1)(\mathrm{Sin}\varphi)=4-4\mathrm{Sin}^2\varphi \Rightarrow 5\mathrm{Sin}^2\varphi+2\mathrm{Sin}\varphi-3=0$$

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، از روش Δ استفاده می‌نماییم:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=2^2-4(5)(-3)=64$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{10} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm8}{10} \Rightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=0.6$$

$\mathrm{Sin}\varphi=-1 \Rightarrow \varphi=270^\circ$ غیر قابل قبول

$\mathrm{Sin}\varphi=0.6 \Rightarrow \varphi=37^\circ$

اکنون، مقدار دو بردار را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{A}|=|\vec{B}|\mathrm{Sin}\varphi \Rightarrow |\vec{A}|=|\vec{B}|\mathrm{Sin}37^\circ \Rightarrow |\vec{A}|=0.6|\vec{B}| \\ |\vec{A}|+|\vec{B}|=4.8\end{array}\right\} \Rightarrow 0.6|\vec{B}|+|\vec{B}|=4.8 \Rightarrow |\vec{B}|=3\,m/s\ ,\ |\vec{A}|=1.8\,m/s$$

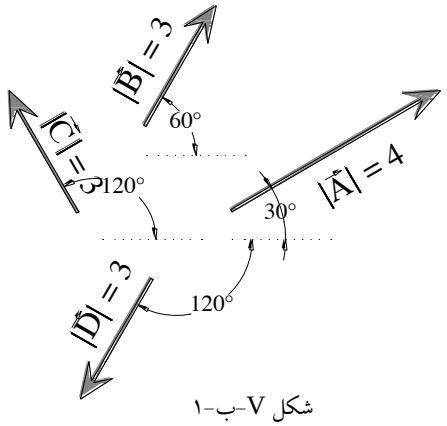
ب- تمرین‌های بدون راه‌حل

تمرین ب-۱: اندازهٔ برایند سه بردار مساوی که دوبه‌دو با یکدیگر زاویهٔ 120 درجه می‌سازند، چه مقدار می‌شود؟

پاسخ: صفر

تمرین ب-۲: اندازهٔ برایند بردارهای شکل V-ب-۱ چقدر است؟

پاسخ: 5



شکل V-ب-۱

تمرین ب-۳: زاویهٔ بین بردار با محور xها چقدر باشد تا مؤلفهٔ x آن، 1.5 برابر مؤلفهٔ y آن شود؟

پاسخ: 33.7°

تمرین ب-۴: یک بردار فرضی را بر روی محورهای یک دستگاه مختصات غیرمتعامد تجزیه نموده‌ایم و یک مؤلفه، √2 برابر دیگری اندازه دارد. همچنین مؤلفهٔ کوچک‌تر، نصف بردار اصلی است. زاویهٔ بین محورهای این دستگاه مختصات چقدر است؟

پاسخ: 62.29°

تمرین ب-۵: اگر اندازهٔ برایند دو بردار برابر، دو برابر اندازهٔ تفاضل آنها باشد، زاویهٔ بین دو بردار یادشده چقدر است؟

پاسخ: 53.13°

تمرین ب-۶: اگر اندازهٔ برایند دو بردار فرضی که با یکدیگر زاویهٔ 60 درجه می‌سازند، √2 برابر اندازهٔ تفاضل آن‌دو باشد، آنگاه تفاضل اندازه‌های عددی آن دو برابر خواهد بود با:

پاسخ: جذر حاصلضرب اندازهٔ آنها

تمرین ب-۷: اندازهٔ برایند دو بردار مساوی که با یکدیگر زاویهٔ 60 درجه می‌سازند، چند برابر یکی از آن دو است؟

پاسخ: √3

تمرین ب-۸: مقدار عددی دو بردار 3 و 7 پاوندی که یکی با راستای شمال زاویهٔ 100 درجه و دیگری زاویهٔ 70 درجه می‌سازد، چقدر است؟

پاسخ: 9.7

تمرین ب-۹: اگر اندازهٔ برایند دو بردار با اندازه‌های 5kN و 6kN، برابر 10.14kN شده است. زاویهٔ بین دو بردار چقدر بوده است؟

پاسخ: $45°$

تمرین ب-۱۰: مقدار مؤلفه‌های یک بردار با اندازهٔ $5m/s$ که با راستای شرق، زاویهٔ 45 درجه می‌سازد، چیست؟

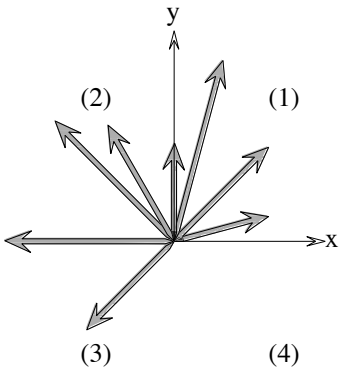
پاسخ: $2.5\sqrt{2}\ m/s$

تمرین ب-۱۱: اگر $\vec{A}=2\vec{i}+1.5\vec{j}$، $\vec{B}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ و $\vec{C}=\vec{i}-3\vec{j}$؛ مطلوب است بردار $2\vec{A}-\vec{B}+3\vec{C}$.

پاسخ: $10\vec{i}-10\vec{j}$

ج- پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تمرین ج-۱: شماری از بردارها مطابق شکل بر یک نقطهٔ مادی اثر می‌کنند. بردار برایند در کدام ربع دستگاه مختصات واقع خواهد شد؟



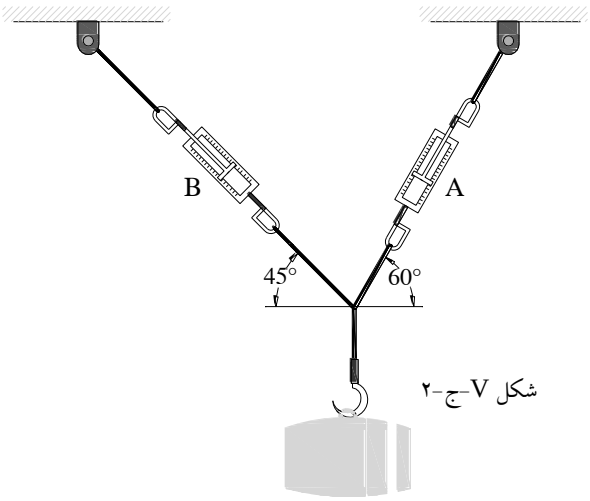
شکل V-ج-۱

۱) ربع اول ۲) ربع دوم

۳) ربع سوم ٤) ربع چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین ج-۲: وزنه‌ای را از دو نیروسنج مطابق شکل آویخته‌ایم. اگر نیروسنج A، 20N را نشان دهد، وزنه چند نیوتن است؟ ($\sqrt{3}\approx1.7$ و $\sqrt{2}\approx1.4$)



شکل V-ج-۲

۱) 40N ۲) 8.5N

۳) 27.3N ٤) 20N

پاسخ: گزینهٔ ۳

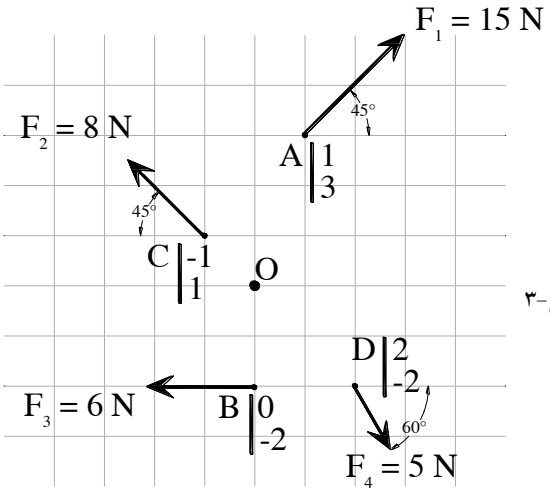
تمرین ج-۳: اگر برایند دو بردار مساوی P برابر $\sqrt{3}P$ شده باشد، زاویهٔ بین این دو بردار چقدر است؟

۱) کمتر از 30 درجه
۲) 30 درجه
۳) 45 درجه
٤) 60 درجه

پاسخ: گزینهٔ ۴

تمرین ج-۴: اندازهٔ برایند بردارهای دستگاه مقابل چقدر و زاویهٔ آن بـا راسـتای افق چقدر است؟ ($\sqrt{3}\approx 1.7$ و $\sqrt{2}\approx 1.4$)

۱) 12 N، 83°
۲) 12 N، 20°
۳) 15 N، 83°
٤) 15 N، 20°



شکل V-ج-۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

تمرین ج-۵: اگر مؤلفهٔ افقی یک بردار، 2.5 برابر اندازهٔ مؤلفهٔ عمودی آن باشد، زاویهٔ بردار با محور xها چقدر است؟

۱) کمتر از 15 درجه
۲) بین 20 تا 30 درجه
۳) بین 45 تا 60 درجه
٤) بیش از 60 درجه

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین ج-۶: برایند بردارهای $\vec{AB}$، $\vec{CD}$، $\vec{DB}$ و $-\vec{CB}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\vec{AB}$
۳) $-\vec{AB}$
٤) $\vec{AD}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین ج-۷: برایند بردارهای $\vec{DB}$، $\vec{BC}$، $\vec{AD}$ و $-\vec{AC}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\vec{AD}$
۳) $-\vec{CD}$
٤) $\vec{BD}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

تمرین ج-۸: برایند دو بردار $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$ و $\vec{B}=\vec{i}+6\vec{j}+\vec{k}$ کدام است؟

۱) $\vec{R}=4\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k}$
۲) $\vec{R}=4\vec{i}-8\vec{j}-5\vec{k}$
۳) $\vec{R}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$
٤) $\vec{R}=4\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

تمرین ج-۹: اندازهٔ برایند دو بردار $\vec{A}=-2.5\vec{i}+4.5\vec{j}-2\vec{k}$ و $\vec{B}=-0.5\vec{i}-4.5\vec{j}+6\vec{k}$ کدام است؟

۱) 0
۲) 5
۳) 6.5
٤) 5.6

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین ج-۱۰: دو بردار $\vec{A}=2\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{B}=-3\vec{i}+3\vec{j}$ با یکدیگر چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) صفر درجه
۲) 90 درجه
۳) 180 درجه
٤) 45 درجه

پاسخ: گزینهٔ ۲

تمرین ج-۱۱: اگر $\vec{A}-\vec{B}=\vec{C}$، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\vec{A}-\vec{C}=\vec{B}$
۲) $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$
۳) $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}$
٤) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینهٔ ۳

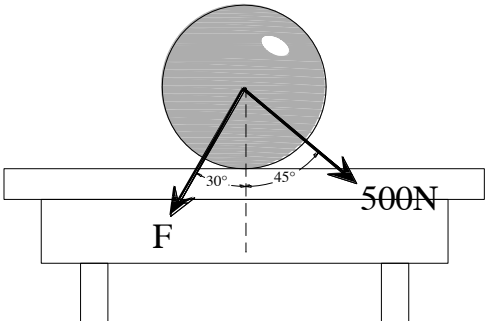
تمرین ج-۱۲: اگر $\vec{A}-\vec{B}=\vec{C}+\vec{D}$، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\vec{A}-\vec{C}=\vec{B}+\vec{D}$
۲) $\vec{A}-\vec{D}=\vec{B}+\vec{C}$
۳) $\vec{A}-(\vec{C}+\vec{D})=\vec{B}$
٤) $\vec{D}-\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

☆☆ **تمرین ج-۱۳:** اگر نیروی عکس‌العمل میز بر گوی، در راستای عمود باشد، مقدار نیروی عکس‌العمل سطح بر گوی چقدر است؟

۱) 965 N
۲) 245 N
۳) 1200 N
۴) صفر

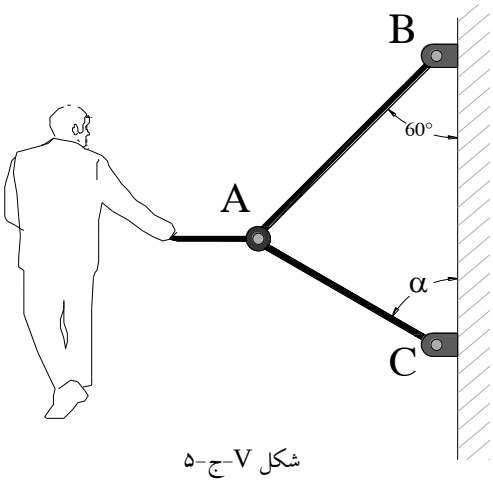


شکل V-ج-۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

☆☆ **تمرین ج-۱۴:** در تصویر مقابل، با فرض اینکه فرد با نیرویی ثابت کابل را بکشد، زاویهٔ α چقدر باشد تا نیروی کابل AB حداقل شود؟

۱) 15°
۲) 30°
۳) 45°
۴) 90°

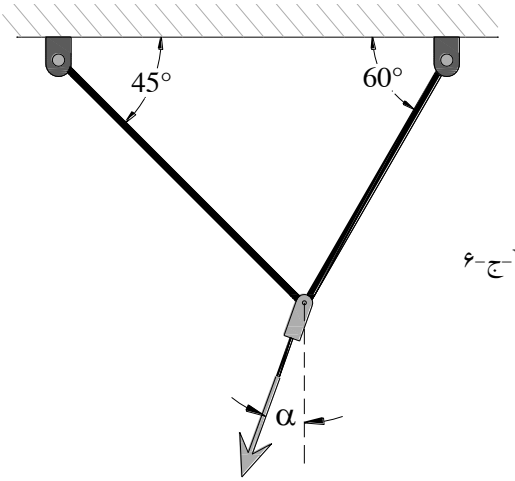


شکل V-ج-۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

☆☆ **تمرین ج-۱۵:** زاویهٔ α چقدر باشد تا نیروی کشش کابل در دو سمت گیره یکسان شود؟

۱) 7.5°
۲) -7.5°
۳) +15°
۴) -15°



شکل V-ج-۶

پاسخ: گزینهٔ ۲